

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

- i) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
- ii) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$
- iii) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\epsilon \phi x > x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, να αποδείξετε ότι:
α) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ και
β) $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$
- iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
α) $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και
β) $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$ με $x > 0$.

α) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt$

3) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = 1 + 2 \int_0^x \frac{f(x-t)}{e^t} dt, \quad x \in R$$

4) Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \rightarrow R$ με συνεχή παράγωγο και $f(0)=1$. Αν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $f'(x) \geq xe^x$, να αποδείξετε ότι $f(x) \geq xe^x - e^x + 2$ για κάθε $x \geq 0$.

5) Έστω η συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow R$, που είναι συνεχής και η συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt. \quad \text{Αν } F(1) < 0, \text{ να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα$$

τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, ώστε $f(\xi) < 0$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x}$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x$.

- i) Να αποδείξετε ότι η ε είναι ασύμπτωτη της C_f
- ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία ε , και την ευθεία $x=\lambda$ με $0 < \lambda < e$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow R$, με $f(1) = \frac{1}{e}$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύουν $f(x) > 0$ και $f(x) = x^2 f'(x)$.

- i) Να βρείτε την f .
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.